MATHEMATIQUES

Régime général

DUREE : 4 heures

COEFFICIENT : 6

– I (Exercice) –

Une urne contient 10 boules dont une blanche. On effectue dans cette urne une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne après chaque tirage.

Pour k entier naturel non nul on note U_k la variable indicatrice de l'événement A_k : "la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est blanche."

Pour n entier naturel non nul on pose :

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \qquad \text{et} \qquad Y_n = U_n + U_{n+1} \ .$$

1) a) Donner les lois des variables U_k et X_n.

b) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X_n si n est égal à 100 ?

2) a) Donner la loi de la variable Y_n. Calculer $E(Y_n)$ son espérance et $V(Y_n)$ sa variance.

b) On pose pour n entier naturel non nul $\quad Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \ .$

Calculer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$ l'espérance et la variance de la variable Z_n.
Montrer que :

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{R}^{*+} \qquad P(|Z_n - \frac{1}{5}| \geq \alpha) \leq \frac{9(2n-1)}{50n^2\alpha^2}$$

En déduire $\quad \lim_{n \to +\infty} P(|Z_n - \frac{1}{5}| < \alpha) \ .$

Tournez la page S.V.P.

– II –

Question 1. Soit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$I_0 = \int_0^1 \sin\ \pi x\ dx \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n\ \sin\ \pi x\ dx\ .$$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}\ .$

Que peut-on en déduire pour la suite (I_n) ?

3) Montrer à l'aide de deux intégrations par parties que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)}(1 - \pi I_{n+2})\ .$$

4) Montrer que la série de terme général I_n est convergente.

Question 2. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_0 : x \longmapsto \sin\ \pi x$$
$$\text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad f_n : x \longmapsto x^n\ \sin\ \pi x\ .$$

Pour n entier naturel on note S_n la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$u \longmapsto S_n(u) = \int_0^u \sum_{k=0}^{n} f_k(x)dx$$

1) Montrer

a) que S_n est continue sur $[0,1]$.

b) que $\qquad \forall\, u \in [0,1[\qquad S_n(u) = \displaystyle\int_0^u \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \sin\ \pi x\ dx$

2) a) Montrer que la fonction définie sur $[0,1[$ par $x \mapsto \dfrac{\sin\ \pi x}{1-x}$ est prolongeable par continuité en $x = 1$.

b) En déduire :

i) l'existence de $K_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\ \pi x}{1-x} dx$

ii) l'existence pour n entier naturel non nul de $\qquad K_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \frac{\sin\ \pi x}{1-x} dx\ .$

iii) l'existence d'un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq K_n \leq \dfrac{M}{n+1}\ .$

3) a) Montrer que $S_n(1) = K_0 - K_{n+1}$.

b) Retrouver ainsi la convergence de la série de terme général I_n et en déduire que si S est sa somme

$$S = K_0 = \int_0^\pi \frac{\sin\ u}{u} du\ .$$

A SUIVRE

– III –

(Partie A)

$\mathbf{R}_p[X]$ est le R-espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à p et du polynôme nul.

$B = (X^0, X, \ldots, X^p)$ est la base canonique de $\mathbf{R}_p[X]$.

On considère pour a réel donné l'endomorphisme θ_a de $\mathbf{R}_p[X]$ défini par

$$\forall\, k \in [0,p] \cap \mathbf{N} \qquad \theta_a(X^k) = (1+X)^k - \frac{a}{2}X^k \ .$$

Question 1.

1) Ecrire la matrice de θ_a dans la base B.

2) Quelles sont les valeurs propres de θ_a ? θ_a est-il diagonalisable ?

Question 2. On suppose dans cette question que a est égal à 1.

1) Montrer que θ_1 est bijectif.

2) Pour p égal à 3, on note A la matrice de θ_1 dans la base B de $\mathbf{R}_3[X]$. Calculer A^{-1}, son inverse, par la méthode du pivot de Gauss. En déduire V le polynôme de $\mathbf{R}_3[X]$ image réciproque du polynôme

$$F = 1 + 5X + 6X^2 + X^3 \ .$$

(Partie B)

f est une application donnée de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$. On considère la suite u définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 \text{ réel donné}$$
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \tfrac{1}{2}u_n + f(n) \qquad (1)$$

Question 1. Si u et v sont deux suites réelles satisfaisant à la condition (1), on pose $w = u - v$. Exprimer w_n le terme général de la suite w en fonction de n, u_0 et v_0.

Question 2. On suppose dans cette question que f est la restriction à $\mathbf{N}$ de la fonction polynôme F définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{p} b_k x^k \qquad (b_k \in \mathbf{R} \qquad \forall\, k \in [0,p] \cap \mathbf{N})$$

Montrer l'existence et l'unicité d'une suite réelle v de terme général

$$v_n = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \ n^k$$

satisfaisant à la condition (1), où $(\alpha_k)_{0 \le k \le p}$ élément de $\mathbf{R}^{p+1}$ est solution d'un système que l'on déterminera.

Application. Pour $p = 3$ et $f : n \longmapsto 1 + 5n + 6n^2 + n^3$, déterminer la suite v et en déduire la suite u satisfaisant à la relation (1) de terme initial u_0 égal à 3 .

Tournez la page S.V.P.

(Partie C)

On note :

E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles définies sur $\mathbf{N}$.

Φ l'application de E dans E définie par : $t \mapsto \Phi(t) = u$ où u est la suite définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = t_0 \; ; \qquad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + t_{n+1}$$

Question 1. Montrer que Φ est un automorphisme de E.

Question 2.

1) Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{2^{n-k}} \cdot$$

Montrer que si la suite t est bornée, la suite $u = \Phi(t)$ est bornée.

.) Si la suite t est une suite constante de terme général $t_k = L$, donner l'expression de u_n en fonction de n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Question 3.

1) On suppose la suite t convergente de limite 0. Montrer que pour tout réel non nul α :

a) il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier n supérieur à n_0 :

$$|u_n| \leq \frac{\alpha}{2} + 2^{-n} \sum_{k=0}^{n_0} 2^k |t_k| \, .$$

b) il existe un entier naturel n_1, tel que pour tout entier n supérieur à n_1 :

$$2^{-n} \sum_{k=0}^{n_0} 2^k |t_k| \leq \frac{\alpha}{2} \, .$$

En déduire que si t est convergente de limite nulle alors $u = \Phi(t)$ est convergente de limite nulle.

2) On suppose la suite t convergente de limite L.

a) Quelle est la limite de la suite $z = \Phi(t - L)$.

b) En déduire que la suite $u = \Phi(t)$ est convergente de limite $2L$.

- :- :- :- :- :- :-